Corso di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Matematica - Docenti: C. Tablino Possio, M. Rossini

---

Prova scritta del 9 luglio 2012

Studente:

---

1. Si consideri il seguente sistema di numeri floating point:

$$\mathscr{F} = \{\pm 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdot 10^e, 1 \le \alpha_1 \le 9,\ 0 \le \alpha_2, \alpha_3 \le 9,\ \ -12 \le e \le 12\} \cup \{0\}.$$

- Dare un esempio di due numeri di $\mathscr{F}$ la cui somma dia overflow in $\mathscr{F}$ e la cui differenza dia underflow in $\mathscr{F}$.

  3 punti

- Determinare il più piccolo intero che non sta in $\mathscr{F}$.

  1 punto

- Eseguire in $\mathscr{F}$ le operazioni $(1/7) * 7$ e $(1/8) * 8$ e calcolare il corrispondente errore relativo.

  4 punti

---

2. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

con α_i, β_i parametri reali.

- Calcolare, quando possibile, la fattorizzazione $A = LU$.

  3 punti

- Determinare la matrice di permutazione P tale che $PAP^T = LU$ con

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_3/\beta_3 & \alpha_2/\beta_2 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} \beta_3 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_1 - \alpha_2^2/\beta_2 - \alpha_3^2/\beta_3 \end{bmatrix}$$

  2 punti

- Applicando il criterio di Sylvester, determinare le condizioni affinché A sia simmetrica e definita positiva.

  2 punti

- Calcolare, quando possibile, la decomposizione di Choleski di A.

  3 punti

---

3. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

- Determinare la funzione $f^*(x) = c$ costante che approssima f nel senso dei minimi quadrati discreti nei nodi a e b. 2 punti

- Determinare qual è il grado di precisione della formula di quadratura quando si approssima $\int_a^b f dx$ con $\int_a^b f^* dx$. 2 punti

---

4. Supponendo di conoscere la soluzione esatta $y(t_n)$ a t_n del problema $y' = f(t, y)$, si consideri lo schema Runge-Kutta esplicito a 2 stadi

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y(t_n) + h(b_1 K_1 + b_2 K_2) \\ K_1 &= f(t_n, y(t_n)) \\ K_2 &= f(t_n + hc_2, y(t_n) + hc_2 K1). \end{aligned}$$

- Determinare per quali valori dei parametri il metodo è consistente 5 punti
- Determinare per quali valori dei parametri il metodo è convergente 3 punti

---

Tempo a disposizione: 2 ore.

Punti totali 30 (ammissione all'orale: minimo 18) Totale: